数理解析研究所講究録
112巻 1971年 87-119

安定過程の drift による摂動

東工大 理　　土谷正明

§1、序

ここで報告することは、「operator $A=\sum_{i=1}^{d}a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}+B$ 但し、Bはd次元対称安定過程の generator）が Markov process を生成するか？」という問題を解くときに出て来る確率積分方程式の解の一意性についてである。

このことについて、[8]，[9]，[10]，[12] 等の結果があるので紹介する．なお関連して [5] の結果も紹介する．

上の問題を考える一つの動機は、Markov process の境界問題において、Ventzel [11]，Sato-Ueno [7]，Motoo [4] 等でなされた解決への理論的枠組の中で、具体的な場合について出来るだけ詳しく調べるということである．即ち，Dを R^2 の円板又は上半平面（後者の場合は次元を一般にして，半空間で考えても以後の議論は同様である），∂D をDの境界とする（後者では必要な場合一点コンパクト化をする）．

このとき、

(1): Dの内部でBrown運動をし、∂Dでoblique reflectionするdiffusionを定めるという問題は

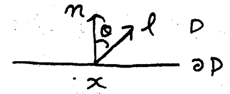
$$
(1)' \quad \begin{cases} (\alpha - \frac{1}{2}\Delta)u = f & \text{in } D \quad (\alpha > 0, \ f : \text{given}) \\ \dfrac{\partial u}{\partial l} = 0 & \text{on } \partial D \end{cases}
$$

を解く(解の存在と一意性を $f \in C(\bar{D})$ に対して示す)ことと同じである。但し $l = l(x)$, $(x \in \partial D)$ は non-tangential inward direction on the boundary ∂D.

ここで、$l = l(x)$ がナメラカならば、解析的な方法(cf. Sato [6])でも確率論的な方法(cf. Ikeda [2])でも解けている。我々は、$l = l(x)$ のナメラカさについての制限は加えずに(1)を解きたい。ナメラカさなしで取扱うことが出来る様に定式化するため、まず l が十分ナメラカな場合について考察する。

$n = n(x)$: inward normal direction on the boundary

$a(x) = \tan \theta(x)$ とおく。



$\theta = \theta(x)$ は $n(x)$ と $l(x)$ のなす角.

ここで、仮定として、$a(x)$ は有界とする。そうすると $(1)'$ は次の $(1)''$ と同値になる:

$$(1)'' \begin{cases} (\alpha - \frac{1}{2}\Delta)u = f & \text{in } D \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + a(x)\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 & \text{on } \partial D \end{cases}$$

良く知られている様に (cf. Sato [6], Sato-Ueno [7]) (1) の diffusion の resolvent を $\{G_\alpha\}$ とおくと

$$G_\alpha = G^0_\alpha + H_\alpha K^{(\alpha)} \overline{LG^0_\alpha} \qquad (\alpha > 0)$$

と分解される. 但し, $\{G^0_\alpha\}$ は minimal process の resolvent $\{H_\alpha\}$ は Dirichlet operator, $K^{(\alpha)} = (-\overline{LH_\alpha})^{-1}$, $L = \frac{\partial}{\partial n} + a(x)\frac{\partial}{\partial x}$ である. 又. 次のことも分っている;

(1) と次の $(1)'''$ は同値である. (cf. Sato [6])

$(1)'''$: $\overline{LH_\alpha}$ が ∂D 上の M-semigroup を生成する. $(\alpha > 0)$

簡単のため D を上半平面とすると

$$\overline{LH_0}\,\varphi(x) = a(x)\varphi'(x) + \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\varphi(x+u) - \varphi(x) - \frac{u}{1+u^2}\varphi'(x)\right\}\frac{du}{\pi u^2}$$

$$\equiv A\varphi(x) \qquad , \quad \varphi \in C_K^2(R^1)$$

となっている. 上の式の右辺の第二項は 1次元 symmetric Cauchy process の generator を φ に作用させた形である.

上の議論で $\frac{1}{2}\Delta$ 及び $\frac{\partial u}{\partial n}$ の代りに 夫々

$$\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{(1+2a)}{y}\frac{d}{dy}, \quad S_y u(x,0) \equiv \lim_{y \downarrow 0}\left[y^{1+2a}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\right]$$

を考えれば symmetric Cauchy process の generator の代りに $-2a$ 位の symmetric stable process の generator が出てくる。(但し、$-1<a<0$)。(cf. S.A. Molčanov - E. Ostrovsky [3], S. Watanabe [12])

従って、$l=l(x)$; non-tangential inward direction に対し、なめらかさの制限なしに(1)を解くには、まず、A に対応する Markov process を定めることが必要になる。

そのためには、次の確率積分方程式

$$(2)\quad x(t) = x + \int_0^t a(x(s))\,ds + l(t), \quad x \in R^1,\ t \geq 0.$$

(但し、$(\Omega, l(t), P)$; symmetric stable process, $l(0)=0$)

の解の存在及び一意性を示せばよい。とくに、一意性が云えれば解の Markov 性及び、A に対応する Markov process の一意性も云える。

§2. 結果

(2)の解の存在については、Skorohod の方法及び、それを拡張した Krylov の方法が使えて、比較的容易に示せるので主として、一意性についての結果を述べる。又以下の結果もある部分は、円周上の場合や多次元でも成立するが、一次元空間の場合が、比較的まとまっているので、この場合につ

いて結果を示す。

$(\Omega, l(t), \mathcal{B}_t, P)$ を time homogeneous Lévy process とする. $l(0)=0$. $E[e^{iz\,l(t)}] = e^{t\psi(z)}$ とする.

$l(t)-l(s) \perp\!\!\!\perp \mathcal{B}_s \quad (s<t)$, $l(t)$ は $(\mathcal{B}_t)$-well adapted.

$$(2) \quad x(t) = x + \int_0^t a(x(s))\,ds + l(t), \quad x \in R^1, \ t \geqq 0.$$

<u>Def</u>; $x(t) = x(t,x)$ は $(\mathcal{B}_t)$-well adapted, right conti. かつ left limit をもつ ($\forall t \geqq 0$). そして, (2) を P-a.s. にみたすとき, $x(t)$ を (2) の解という。

<u>Def</u>; (2) の解が (pathwise) unique とは, $x(t,x)$, $y(t,x)$ を (2) の任意の2つの解としたとき,

$$P(x(t,x) = y(t,x) \quad \forall t \geqq 0) = 1 \qquad \forall x \in R^1$$

が成立することを云う.

<u>Theorem 1</u> 一意性 (cf. [9], [10], [12])

(1°) $\dfrac{1}{\mathrm{Re}\,\psi(z)} = O\left(\dfrac{1}{|z|}\right) \qquad (|z| \to \infty)$

ならば, 任意の実数値有界連続函数 $a(x)$ に対し, (2) の解は unique である。

(2°) $\dfrac{1}{\mathrm{Re}\,\psi(z)} = o\left(\dfrac{1}{|z|}\right) \qquad (|z| \to \infty)$

ならば、任意の実数値有界可測函数 $a(x)$ に対し、(2) の解は unique である。

注 1. symmetric Cauchy process が $l(t)$ の場合は (1°) の条件をみたす。$l(t)$ が、$1<\alpha\leq 2$ なる α 位の symmetric stable process ならば、(2°) の条件をみたす。

注 2. Blumenthal - Getoor [1] の定義した $l(t)$ の lower index α'' を用いれば、(2°) の条件は $\alpha''>1$ ということになる。但し、$\alpha''=\sup\{\beta\geq 0\ ;\ |z|^{-\beta}\operatorname{Re}\psi(z)\to 0 \quad \text{as } |z|\to\infty\}$

注 3. (1) の問題は $a(x)$ が有界連続ならば解ける。(同様に、$\frac{1}{2}\Delta$ と $\frac{\partial}{\partial n}+a(x)\frac{\partial}{\partial x}$ を夫々 $\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{(1+2a)}{y}\frac{d}{dy}$ と $\delta_y + a(x)\frac{\partial}{\partial x}$ でおきかえた場合も同様に解ける)

<u>Theorem 2</u> (S. Watanabe (12))

$l(t)$ の index $\alpha<1$ ならば、ある有界連続函数 $a(x)$ に対し、(2) の解は unique でない。但し

$$\alpha=\inf\left\{\beta>0\ ;\ \int_{|u|<1}|u|^{\beta}\nu(du)<\infty\right\}$$

$\nu(du)$ は $l(t)$ の Lévy measure.

注 4. 一般に $\alpha''\leq\alpha$. $l(t)$ が γ 位の symmetric stable process ならば $\alpha = \alpha' = \gamma$. よって、$l(t)$ が symmetric stable process の場合について、すべての有界連続函数 $a(x)$ に対し (2) の解が一意かそうでないかについてははっきりしたことになる。しかし、$a(x)$ が Lipschitz 連続であれば常に解は unique だから、$\alpha < 1$ のときは、$a(x)$ が Hölder 連続のときに、面白い事情が生じることが予想される。そのことについては後で述べる。(Cf §3. II)

Theorem 1 の略証.

多次元の場合にも全く同様であるが、まず新しい一意性の概念を定義する。(Stroock - Varadhan [13] にならって)

$W = D([0,\infty) \to R^1) \equiv \{\omega ;\ \omega$ は $[0,\infty) \to R^1$ mapping 右連続、左極限をもつ$\}$, $\omega(t) = x(t,\omega) = x(t)$ とおく.

$\mathcal{F}_t = \sigma(x(s) ; s \leq t) \equiv$ $x(s), s \leq t$ を可測にする最小の σ-algebra. $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty = \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$

$A = a(x)\frac{d}{dx} + l(t)$ の generator

Def. $(W, \mathcal{F})$ 上の確率測度 P が A に付ずいた $x (\in R^1)$ を出発する stochastic equation の解とは、P が

$P(x(0) = x) = 1$ かつ

$$E\left[e^{iz(\xi(t)-\xi(s))} \mid \mathcal{F}_s\right] = e^{(t-s)\psi(z)} \qquad (t > s)$$

をみたすときに云う．但し，EはPによる平均で，$\xi(t)$ は

$$\xi(t) = x(t) - x - \int_0^t a(x(s))ds$$

で定義される process．上の定義は，

$$X_\theta(t) = \exp\left\{ i\theta(x(t)-x(0)) - i\theta\int_0^t a(x(s))ds - t\psi(\theta) \right\} \quad \begin{pmatrix} t\geq 0 \\ \theta\in R^1 \end{pmatrix}$$

とおいたとき，P は $P(x(0)=x)=1$ かつ $(X_\theta(t), \mathcal{F}_t, P)$ が，$\forall\theta\in R^1$ に対し，martingale になるということと同値である．

注 5．上の定義は，$a = a(t,x)$ $(t\geq 0, x\in R^d)$ のように，時間 t に依存している場合にも同様に定義できる，即ち，

$\mathcal{F}_\beta^\alpha \equiv \sigma(x(s) ; \alpha\leq s\leq\beta)$，$\mathcal{F}_\beta \equiv \mathcal{F}_\beta^0$，$\mathcal{F}^\alpha \equiv \mathcal{F}_\infty^\alpha$ とおくとき，$(\Omega, \mathcal{F}^s)$ 上の probability measure P が

$$A = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^d a_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i} + B$$

$$\left(\begin{array}{l} B \text{ は 時間的一様 Lévy process の generator} \\ a(t,x) = (a_1(t,x), \cdots, a_d(t,x)),\ x=(x_1,\cdots,x_d) \end{array} \right)$$

に付ずいした，時刻 $s\geq 0$ で，$x\in R^d$ を出発する martingale problem (stochastic equation) の解とは，$P(x(s)=x)=1$ かつ

$$X_\theta^s(t) = \exp\left\{ i\langle \theta, x(t)-x(s)\rangle - i\langle \theta, \int_s^t a(u,x(u))du\rangle - (t-s)\psi(\theta) \right\}$$
$$(t \geq s,\ \theta \in R^d)$$

とおいたとき、$(X_\theta^s(t), \mathcal{F}_t^s, P)_{t\geq s}$ が $\forall\theta\in R^d$ に対し、martingale になることと定義する。但し、$\langle\ ,\ \rangle$ は R^d の内積で、$\psi(\theta)$ は B に対応する d-次元 Lévy process $\xi(t)$ により $E[e^{i\langle\theta,\xi(1)\rangle}] = e^{\psi(\theta)}$ で定義される。

定理1の略証にはいる。(1°)より定数 $K>0$, $C>0$ が存在して、

$$\left| e^{t\psi(z)} \right| \leq K e^{-\frac{t}{c}|z|} \quad \text{for } \forall z\in R^1,\ \forall t>0$$

従って、$\ell(t)$ の推移確率 $P(t,dx)$ $(t>0)$ は連続な density $p(t,x)$ をもち、$p(t,\cdot)\in L^p(R^1)$ $(\forall p\geq 1)$ 従って Plancherel の定理を使えば、$\ell(t)$ の semigroup を H_t とすれば、

$$\sup_{x\in R^1} |H_t f(x)| \leq \frac{K\sqrt{c}}{\sqrt{t}} \|f\|_2 \quad \text{for } \forall f\in L_2(R).$$

又、(1°)より $\frac{d}{dx}G_\lambda$ は $L_2(R)$ 上の bounded operator を定義する。但し、G_λ は $\ell(t)$ の resolvent.

従って、[10] と全く同様にして、十分定数に近い、有界可測函数 $a(x)$ に対し、$A = a(x)\frac{d}{dx} + B$ に付ずいする

stochastic equation は $\forall x \in R^1$ に対し，x を出発する解をただ一つ持つことを示せる。

更に (2°) の仮定の下では，任意の有界可測函数 $a(x)$ に対し $a(x)\frac{d}{dx}G_\lambda$ の L_2-norm は十分大きな λ に対しては常に 1 より小さくなる。従って，任意の有界可測函数 $a(x)$ に対し，A に付ずいする stochastic equation は，任意の出発点 x について，唯一つの解を持つ．故に，次の Proposition から定理は示せる。

<u>Proposition 1</u>

$a(t,x)$ $(t \geq 0,\ x \in R^1)$ を有界可測函数とするとき，方程式

$$\xi(t) = x + \int_0^t a(s, \xi(s))\,ds$$

の 2 つの解を $\xi(t)$, $\eta(t)$ とするとき，$\xi(t) \wedge \eta(t)$, $\xi(t) \vee \eta(t)$ も解になる．$a \wedge b = \min(a,b)$, $a \vee b = \max(a,b)$.

(1°) で $a(x)$ が有界連続のときは，次の Proposition を使えばよい．

<u>Proposition 2</u>

$a(x)$ が有界連続ならば，(2) の最大解 $\bar{x}(t,x)$ と最小解 $\underline{x}(t,x)$ が存在し，共に，$(\bar{x}(t,x), \mathcal{B}_t, P)$ $\left((\underline{x}(t,x), \mathcal{B}_t, P)\right)$ は Hunt process になる。

定理2の略証 (S. Watanabe [12])

$a(x)$として, bounded continuous increasing function で $x=0$ 以外で Lipschitz continuous で奇函数となっているものを取る. そのとき (2) に対して次の比較定理が成立する.

Proposition 3

$$Y(t) \leqq x + l(t) + \int_0^t a(Y(s))ds \qquad t \in [0, t_0]$$
$$(\geqq)$$

ならば

$$Y(t) \leq \overline{x}(t,x) \qquad (\text{resp.} \quad Y(t) \geq \underline{x}(t,x))$$

そこで, 次の方程式

(3) $$y(t) = \frac{1}{c}\int_0^t a(y(s))ds \quad \left(但し, c>0, \int_{0+} \frac{d\xi}{a(\xi)} < \infty \right.$$ と仮定しておく) の最大解 $\overline{y}_c(t)\ (>0 \quad \forall t>0)$, 最小解 $\underline{y}_c(t) = -\overline{y}_c(t)$ と $\overline{x}(t,0)$, $\underline{x}(t,0)$ を夫々比較する.

そして, 次の Proposition を得る.

Proposition 4

$\rho_c \equiv \inf\{t\ ;\ |l(t)| > \overline{y}_c(t)\}$ とおくとき

$P(\rho_c > 0) = 1$ となる様な定数 $c \geqq 2$ が存在するならば $\delta = \delta(\omega) > 0$ が存在して,

$$\overline{x}(t,0) > \underline{x}(t,0) \qquad (0 < t \leq \delta)$$

そこで特に

$$a(x) = |x|^{\beta}\operatorname{sgn} x \quad (x=0 \text{ の近傍で}) \quad 0<\beta<1-\alpha$$

ととると，(3)の最大解 $y_c(t) = \{c(1-\beta)\}^{\frac{1}{1-\beta}} t^{\frac{1}{1-\beta}}$ $(c \geqq 2)$ だから，次下に述べる Khintchin の定理（Prop 5 (i)）を使って

$$P(\rho_c > 0) = 1 \qquad (c \geqq 2)$$

となり，Prop 4 より一意性がこわれて，定理2が示せた．

Proposition 5 ［Khintchin の定理］（cf [1]）

$l(t)$ を時間的一様な Lévy process とし，α をその index とすれば，

(i) $\beta > \alpha$ ならば $P\left(\lim_{t\to 0} t^{-1/\beta} l(t) = 0\right) = 1$

(ii) $\beta < \alpha$ ならば $P\left(\overline{\lim_{t\to 0}}\, t^{-1/\beta} |l(t)| = +\infty\right) = 1$

§ 3

まず，定理1を拡張，精密化した結果について述べる．しかし，まだ完全に満足すべき状態には到っていない様に思う．

次に方法は違うが，関連する問題として，本尾氏の結果を紹介する．

(I) 多次元への拡張

$l(t)$ を N 次元の spherically symmetric stable process で．index $\alpha \geqq 1$ とすると，$2 \geqq \alpha > 1$ ならば，$a(t,x) = (a_1(t,x), \cdots, a_N(t,x))$ で，各 $a_i(t,x)$ が 有界可測ならば．(注) 5で述べた martingale problem の解は唯一つ存在する．その時に必要な評価（cf. [10] の Prop 1.1, Lemma 2.2）は Motoo [5] でのやり方をみれば得られる（subordination を使う）．$\alpha = 1$ のときは 各 $a_i(t,x)$ が 有界連続ならば，martingale problem の解は唯一つである．（cf. [10]）

(II). $l(t)$ の index $\alpha < 1$ の場合．（S. Watanabe [12]）

この場合は．定理2でみた様に，一般には一意性は成立しない．では．どんな $a(x)$ に対し，$l(t)$ との関連の下に，一意性が成立するかということが問題になるが．S. Watanabe の結果を大略紹介すれば 次の様になる．

方程式 (2) において，$l(t)$ を symmetric Lévy process で $a(x)$ は 定理2の証明中の条件（cf. p11）の上に更に．

$$\lim_{x \to 0} \frac{a(c|x|)}{a(|x|)} > 0 \qquad \forall c > 0$$

をみたすと仮定する．

$\{ y^n(t) \}$ を $y^0(t) \equiv 1$，$\quad y^n(t) = \int_0^t a(y^{(n-1)}(s))\,ds$

で定義し，

$$\sigma_c^n = \inf\{t\ ;\ |l(t)| > c\, y^{(n)}(t)\}$$

とおくとき．

Proposition 6

ある番号 n が存在して，任意の $c>0$ に対し

$P(\sigma_c^n = 0) = 1$ ならば

$\overline{x}(t,x) \equiv \underline{x}(t,x)$ a.s. P $\forall x$

（説明）

出発点に関する比較定理（例えば $x \leq 0 \Rightarrow \overline{x}(t,x) \leq \underline{x}(t,0)$）と，$l(t)$ は $y^{(n)}(t)$ に比べていくらでも早く原点の両側に出ることを使えば，$\overline{x}(t,0) = \underline{x}(t,0)$ が分り，原点以外から出発した解は原点に着くまでは一意だから，$\overline{x}(t)$ と $\underline{x}(t)$ の強マルコフ性を使えば，Prop の結論を得る．

この結果を使うと，例えば，$a(x) = |x|^\beta \operatorname{sgn} x$ （$x=0$の近傍で）$l(t)$ を α 位の symmetric stable process $(0<\alpha<1)$ とするとき，Khintchin の定理（Prop 5 の(ii)）を使えば．定理 2 の結果と並べて述べると

$\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{1-\beta} \Rightarrow$ (2) の uniqueness は成立する

$\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{1-\beta} \Rightarrow$ (2) の uniqueness は成立しない (Th. 2)

が分る.

(III) 定理1の(1°)の拡張 (H. Tanaka [8])

定理1(1°)で $a(x)$ が有界可測の場合に,一意性が成立するかどうかということが問題になる.証明中に述べた様に $a(x)$ が定数に充分近ければよいが,そうでない場合について H. Tanaka の結果の大要を紹介する.

$a(x)$ は有界かつ $x=0$ 以外で Lipschitz continuous 即ち $x, y>0$ 又は $x, y<0$ ならば

$$|a(x)-a(y)| \leq K|x-y|$$

が成立する定数 $K>0$ が存在する.又 $a(0)=0$ とする.

$$a_+ \equiv \lim_{x\downarrow 0} a(x), \quad a_- \equiv \lim_{x\uparrow 0} a(x)$$ とおいて.

$a_+ \neq a_-$ のときを考える.

Lévy process $l(t)$ に対し次の条件を考える. $\rho>0$ に対し

$$\sigma_+ = \inf\{t>0\,;\ l(t)+\rho t<0\}$$

$$\sigma_- = \inf\{t>0\,;\ l(t)-\rho(t)>0\}$$

とおいて.

(Q_+) $\forall\rho>0$ に対し, $P(\sigma_+=0)=1$

(Q_-) $\forall\rho>0$ に対し $P(\sigma_-=0)=1$

例えば，index $\alpha \geqq 1$ なる symmetric stable process は (Q_+), (Q_-) をみたしている．

<u>Proposition</u> 7

$a(x)$ を奇函数とするとき

(1°) $a_+ < a_-$ ならば symmetric Lévy process $l(t)$ に対し (2) の解は唯一つ存在する．

(2°) $a_+ > a_-$ ならば (Q_+) かまたは (Q_-) をみたす symmetric Lévy process $l(t)$ に対し (2) の解は唯一つ存在する．

（説明）

原点での $a(x)$ の特異性を考慮して，次の方程式

$$
(4)\begin{cases} x(t) = x + \int_0^t a(x(s))\,ds + \int_0^t \delta(s)\,ds + l(t) \\ a_- \leq \delta(s) \leq a_+ \quad \text{or} \quad a_+ \leq \delta(s) \leq a_- \\ x(s) \neq 0 \Rightarrow \delta(s) = 0 \end{cases}
$$

を考える．

$a_+ < a_-$ のときは，右連続，左極限を持つ任意の函数 $l(t)$ に対し，各出発点 x 毎に唯一つ解 $x(t)$ を持つ． $l(t)$ を Lévy process とすると定数 a_0 （$a_+ \leq a_0 \leq a_-$）が存在して，(4) の unique solution $x(t,x) = x(t)$ は次の方程式 (4′) をみたす．

$$(4)' \quad x(t) = x + \int_0^t a(x(s))ds + a_0 \int_0^t \chi(x(s)=0)ds + l(t) \quad (\text{a.s. } P)$$

よって、特に $l(t)$ が symmetric で $a(x)$ が奇函数ならば $x=0$ のときを考えると解の一意性から $a_0=0$ となり方程式 $(4')$ は (2) になる。従って (1°) の主張が成立する。

$a_+ > a_-$ のときは、一般に (4) の解の uniqueness はいえないが、最大解 $\bar{x}(t,x)$ と最小解 $\underline{x}(t,x)$ が存在し、$l(t)$ が Lévy process のときは、定数 $\bar{a}_0$ $(a_- \le \bar{a}_0 \le a_+)$ が存在して、$\bar{x}(t) = \bar{x}(t,x)$ は

$$(\bar{4}) \quad \bar{x}(t) = x + \int_0^t a(\bar{x}(s))ds + \bar{a}_0 \int_0^t \chi(\bar{x}(s)=0)ds + l(t) \quad (\text{a.s. } P)$$

をみたし、強マルコフ過程になる。$\underline{x}(t)$ に対しても同様である。そこで、(a_+) が成立すると仮定すれば、$\bar{x}(t,0)$ は いくらでも短い時間に $-pt$ より左側に出る。そこで (4) の解の出発点に関する比較定理を使って $\bar{x}(t,0) = \underline{x}(t,0)$ a.s. P が分る。原点以外から出た解は原点に着くまでは一意だから、$\bar{x}(t)$ と $\underline{x}(t)$ の強マルコフ性を使えば、

$$\bar{x}(t,x) = \underline{x}(t,x) \quad \text{a.s. } P \quad \forall x$$

従って $\bar{a}_0 = \underline{a}_0$ となり、後は (1°) と同様にして (2°) の主張を得る。

(IV) operator A の一般化 (M. Motoo [5])

拡散過程の境界上の process に相当するものを構成する立場からみれば，operator A の jump part をより一般にしたものが Markov process を生成することを示すことが望まれる (cf. [6] p)

それについての Motoo の結果を紹介する.

今迄の operator A の Lévy measure の term を一般にした次の operator A を考える.

$$Au(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + \int_{|z|\le 1} \left\{ u(x+z) - u(x) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right\} p(x, dz)$$

ここで
$$p(x, dz) = \omega_N \varphi(x, z) |z|^{-(N+\eta)} dz \qquad x \in R^N$$
$$= \varphi(x, z) r^{-(1+\eta)} dr\, d\omega \qquad dz \subset R^N$$

$R^N \ni z = (r, \omega)$; 球面極座標 $r = |z|$. $\frac{1}{\omega_N}$: R^N の単位球の表面積.

次の仮定をおく

(A) $1 \le \eta < 2$

(B) $a_i(x)$, $\varphi(x, z)$; 可測函数

$$|a_i(x)| \le M, \qquad 0 < L_1 \le \varphi(x, z) \le L_2$$

なる定数 M, L_1, $L_2 > 0$ が存在する.

(C) $\eta = 1$ のときに限り. 以下を仮定する.

$$|\varphi(x,z)-\varphi(x,0)| \leq L_3|z|^\alpha$$

となる定数 L_3, $\alpha>0$ が存在する.

㊟ $\varphi(x,z)\equiv$ constant の場合が今迄考えて来た case である
積分範囲を $|z|\leqq 1$ と制限しているのは、最終的には不必要.

上の仮定の下で次の問題を考える.

次の H.1 〜 H.4 をみたす $\{H_\lambda\}_{\lambda>0}$ は唯一つ存在するか?

H.1 $\{H_\lambda\}_{\lambda>0}$ は $C_0(R^N)$ 上の resolvent である

H.2 $0\leq \lambda H_\lambda \leq 1$

H.3 $\lambda H_\lambda f \longrightarrow f \quad \lambda\to\infty \quad$ in $C_0(R^N)$

H.4 $H_\lambda(\lambda-A)f = f \quad$ for $\quad f\in C_0^2(R^N)$

このことは、更に $a_i(x)$ と $\varphi(x,z)$ に連続性を仮定すれば、存在については肯定的に解決される. しかし、以下の途中の評価においては必要ないが存在のためと、途中の議論においても連続性を仮定すればだいぶん簡単になるので以下においてはすべて $a_i(x)$ と $\varphi(x,z)$ の連続性を仮定する. 上の記号の意味を説明すると、$C_0(R^N)$ は R^N 上の実数値連続函数で無限遠で 0 となるもの全体で、sup norm で

Banach space と考え，H.3の収束もその意味である．

$C^2(R^N)$ は2階迄の偏導函数がすべて $C_0(R^N)$ に属するもの全体．

存在証明の方法は $1 \leq \eta < \delta < 2$ なる δ をとり

$$B u(x) = \int_{|z| \leq 1} \left\{ u(x+z) - u(x) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) z_i \right\} \frac{\omega_N}{|z|^{N+\delta}} dz$$

$$A^\varepsilon = \varepsilon B + A$$

$$P_\varepsilon(x, dz) = \left(\varepsilon |z|^{-(N+\delta)} + \varphi(x, z) |z|^{-(N+\eta)} \right) \omega_N \, dz$$
$$= \left(\varepsilon r^{-(1+\delta)} + \varphi(x, z) r^{-(1+\eta)} \right) dr \, d\omega .$$

とおいて，A^ε に対応する resolvent の存在を述べ $\varepsilon \downarrow 0$ として $\{H_\lambda\}_{\lambda>0}$ を求める．

そのため，εB の resolvent の性質が必要なので以下に述べる．本質的には index δ の spherically symmetric stable process の resolvent を扱うわけだから，その性質を並あげる．証明には subordination を使えばよいが省略する．

Proposition 8

G_λ を index δ $(1<\delta<2)$ の N-dim. spherically symmetric stable process の resolvent とするとき

1°) 定数 $C = C(\delta)$ が存在して

$$\sup_{x\in R^N}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}G_\lambda f(x)\right| \le C\lambda^{\frac{1}{\delta}-1}\|f\| \quad , \forall f\in B(S)$$

2°) $0<\delta'<\delta$ なる δ' に対し 定数 $C=C(\delta,\delta')$ が存在して.

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i}G_\lambda f(x)-\frac{\partial}{\partial x_i}G_\lambda f(y)\right|\le C|x-y|^{\delta'(1-\frac{1}{\delta})}\lambda^{-(1-\frac{1}{\delta})(1-\frac{\delta'}{\delta})}\|f\|$$

$$\forall f\in B(S)$$

3°) $f\in B(S)$ に対し

$$G_\lambda f(x)=0 \quad \forall x \iff f(x)=0 \quad \text{a.e. } x \text{ (Lebesgue measure)}$$

ここで $B(S)$ は R^N 上の bounded measurable function 全体
$\|f\|=\sup_x|f(x)|$.

注 εB に対応する resolvent を G_λ^ε とするとき G_λ^ε に対しても 上の 1°)〜3°) がすべて成立する.

<u>Proposition</u> 9

$H_\lambda^\varepsilon=G_\lambda^\varepsilon(I-AG_\lambda^\varepsilon)^{-1}$ とおくと $\{H_\lambda^\varepsilon\}_{\lambda>0}$ は各 $\varepsilon>0$ に対し H.1 〜 H.4 をみたす.

proof)

I は $C_0(R^N)$ 上の恒等作用素である. Prop.8 より. AG_λ^ε は $C_0(R^N)$ 上の linear operator で 十分大きな λ_0 に対

し, $\|AG_\lambda^\varepsilon\| < 1$ for $\forall\lambda \geqq \lambda_0$

となるから. H_λ^ε は $C_0(R^N)$ 上の作用素として定義できる しかも $\lambda \geqq \lambda_0$ に対し H.1 ～ H.4 をみたすことは明らか. $\lambda < \lambda_0$ に対しても H.1 ～ H.4 をみたす様に拡張できるから. Prop. は示せた.

次に $\{H_\lambda^\varepsilon f\}_{0<\varepsilon\leq 1}$ が $C_0(R^N)$ の中で相対コンパクトになることを示すため幾つかの評価を準備する.

$\{H_\lambda^\varepsilon\}_{\lambda>0}$ に対応する Hunt process を path space 上表現して $\{x_t, P_x^\varepsilon\}$ と表わす. 間違うおそれのないときは以後 suffix ε は落す場合もある.

<u>Lemma</u> 1

$0 < R \leqq 1$, $\sigma = \sigma_R = \inf\{t>0\,;\ |x_t - x_0| \geqq R\}$

とおくと, 定数 $0 < C_1 < C_2$ が存在して

$$\frac{C_1}{\varepsilon R^{-\delta} + R^{-\eta}} \leqq E_a^\varepsilon(\sigma_R) \leqq \frac{C_2}{\varepsilon R^{-\delta} + R^{-\eta}} \quad \begin{pmatrix}\forall a \in R^N \\ 0<\forall\varepsilon\leq 1\end{pmatrix}$$

が成立する. 但し $C_i = C_i(\mathcal{A})$ (仮定 (A) ～ (C) の中に出て来る定数 $\eta, \delta, M, L_1, L_2, N, \alpha$ のみに依存する定数を $C = C(\mathcal{A})$ とかくことにする.

(略証)

$\eta > 1$ のときに説明する.

$R \le \rho < q$ ととり，

$$u(x) = \begin{cases} |x-a|^2 & \text{if } |x-a| \le \rho \\ q^2 & \text{if } |x-a| \ge q \end{cases} \qquad u \in C^2(R^N)$$

と u をとる．なお，u は $|x-a|$ の函数として単調増加になる様にしておく．

$|x-a| \le R$ ならば

$$\left| \sum_{i=1}^{N} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right| \le 2M\sqrt{N}\, R^{2-\eta}$$

$$\int_{|z|\le 1} \left\{ u(x+z) - u(x) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) z_i \right\} p_\varepsilon(x, dz)$$

$$\le \int_{\substack{|z+x-a|\le\rho \\ |z|\le 1}} |z|^2 p_\varepsilon(x,dz) + \int_{\substack{|z+x-a|\ge\rho \\ |z|\le 1}} \{u(x+z)-u(x)\} p_\varepsilon(x,dz) + \int_{\substack{|z+x-a|\ge\rho \\ |z|\le 1}} \left| \sum_{i=1}^{N} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) z_i \right| p_\varepsilon(x,dz)$$

$$= I_1 + I_2 + I_3$$

$$\varepsilon \frac{(\rho-R)^{2-\delta}}{2-\delta} + L_1 \frac{(\rho-R)^{2-\eta}}{2-\eta} \le I_1 \le \varepsilon \frac{(\rho+R)^{2-\delta}}{2-\delta} + L_2 \frac{(\rho+R)^{2-\eta}}{2-\eta}$$

$$0 \le I_2 \le q^2 \left(\frac{\varepsilon}{\delta(\rho-R)^{\delta}} + \frac{L_2}{\eta(\rho-R)^{\eta}} \right)$$

$$I_3 \le 2\sqrt{N} R \left(\frac{\varepsilon}{(\delta-1)(\rho-R)^{\delta-1}} + \frac{L_2}{(\eta-1)(\rho-R)^{\eta-1}} \right)$$

従って、$\rho = (C+1)R \quad C>0$ とおくと

$$A^{\varepsilon}u(x) \geq \varepsilon \frac{C^{2-\delta}R^{2-\delta}}{2-\delta} + L_1 \frac{C^{2-\eta}R^{2-\eta}}{2-\eta} - \frac{2\sqrt{N}\,\varepsilon}{\delta-1} C^{1-\delta}R^{2-\delta}$$

$$- \frac{2\sqrt{N}L_2 C^{1-\eta} R^{2-\eta}}{\eta-1} - 2M\sqrt{N}R^{2-\eta}$$

ここで $C>0$ を

$$\begin{cases} C > 2\dfrac{2-\delta}{\delta-1} 2\sqrt{N} \\ C > 3\cdot\dfrac{2-\eta}{L_1}\dfrac{2\sqrt{N}L_2}{\eta-1} \\ C^{2-\eta} > 3\cdot\dfrac{2-\eta}{L_1} 2M\sqrt{N} \end{cases}$$

をみたすように定めると、次の様な定数 C_1 が定まる。

$$A^{\varepsilon}u(x) \geq C_1(\varepsilon R^{2-\delta} + R^{2-\eta})$$

同じ C に対し、$\rho = (C+2)R$ とおくと 定数 C_2 が定まって

$$A^{\varepsilon}u(x) \leq C_2(\varepsilon R^{2-\delta} + R^{2-\eta})$$

又

$$R^2 \leq E^{\varepsilon}_a(u(x_\sigma)) = E^{\varepsilon}_a\left(\int_0^{\sigma} A^{\varepsilon}u(x_t)\,dt\right)$$

$$\rho^2 \geq E^{\varepsilon}_a(u(x_\sigma))$$

より証明出来た。

$\eta = 1$ のときは I_3 の評価で仮定(C)を援用すれば大体上と同様である。

$$u(x) = U^\varepsilon(x) = H^\varepsilon_\lambda f(x) = E^\varepsilon_x\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(x_t)\,dt\right) \quad (\lambda > 0)$$

$$\Omega = \Omega(a, R) = \{y ; |y - a| \leq R\}$$

$$u_R(x) = U^\varepsilon_R(x) = E^\varepsilon_x(u(x_\sigma)) \qquad \sigma = \sigma_R = \inf\{t > 0 ; |x_t - x_0| > R\}$$

$$M(R) \equiv M^\varepsilon(a, R) \equiv \sup_{x \in \Omega(a,R)} u(x)$$

$$m(R) \equiv m^\varepsilon(a, R) \equiv \inf_{x \in \Omega(a,R)} u(x)$$

とおく。 次の Lemma は $u^\varepsilon(x) = H^\varepsilon_\lambda f(x)$ の同程度連続性を示すのに必要である.

<u>Lemma 2</u>

1°) 定数 $C_3 = C_3(\mathcal{A}, \lambda, \|f\|)$ が存在して

$$\sup_{x \in \Omega(a,R)} |u(x) - u_R(x)| \leq C_3 R \; (\leq C_3 \sqrt{R}) \qquad (0<R\leq 1)$$

2°) 次の何れかが成立する.

定数 $C_4 = C_4(\mathcal{A}) > 0$ と $C_5 = C_5(\mathcal{A}, \lambda, \|f\|) > 0$ が存在して, もし $0 < R \leq 2^{-6}$ ならば

i) $M(R) \leq M(\sqrt{R}) + C_5\sqrt{R} - C_4 \dfrac{M(\sqrt{R}) - m(\sqrt{R})}{2}$

又は

ii) $m(R) \geq m(\sqrt{R}) - C_5\sqrt{R} + C_4 \dfrac{M(\sqrt{R}) - m(\sqrt{R})}{2}$

proof)

1°) は $|u(x)-u_R(x)| \leq |u(x)-E_x(e^{-\lambda\sigma}u(x_\sigma))|$

$$+|E_x(e^{-\lambda\sigma}u(x_\sigma))-u_R(x)|$$

より明らか。

2°) は。

$$u_R(x) = E_x(u(x_\sigma)\,;\, x_\sigma \in \Omega(3R))$$
$$+E_x(u(x_\sigma)\,;\, x_\sigma \in \Omega(4R)\setminus\Omega(3R))$$
$$+E_x(u(x_\sigma)\,;\, x_\sigma \in \Omega(\sqrt{R})-\Omega(4R))$$
$$+E_x(u(x_\sigma)\,;\, x_\sigma \in \Omega(\sqrt{R})^c)$$

但し $\Omega(r)=\Omega(a,r)$

ここで 次のことを使う。一般に

$$\begin{cases} \Omega(x,R)^c \supset A \text{ ならば} \\ E_x(g(x_\sigma)\,;\,x_\sigma\in A)=E_x\left(\int_0^\sigma dt \int_{x_t+z\in A} g(x_t+z)\,p_\varepsilon(x_t,dz)\right) \end{cases}$$

とすると $R\leq 2^{-6}$, $|x-a|\leq R$ より,

$x_t+z \in \Omega(\sqrt{R})^c$ ならば $|z|\geq \frac{3}{4}\sqrt{R}$

従って.

$$P_x(x_\sigma\in\Omega(a,\sqrt{R})^c)\leq c\sqrt{R} \qquad \forall x\in\Omega(a,R)$$

となる定数 c が存在する。 $c=c(\cancel{\mathcal{A}})$

従って.

$$A^+ = \left\{ x \in \Omega(4R) \setminus \Omega(3R)\ ;\ u(x) \geq \frac{M(\sqrt{R}) + m(\sqrt{R})}{2} \right\}$$

$$A^- = \left\{ x \in \Omega(4R) \setminus \Omega(3R)\ ;\ u(x) < \frac{M(\sqrt{R}) + m(\sqrt{R})}{2} \right\}$$

とおくとき,

$$\begin{aligned} u_R(x) = {} & E_x\left[u(x_\sigma)\ ;\ x_\sigma \in \Omega(3R) \cup (\Omega(\sqrt{R}) \setminus \Omega(4R)) \right] \\ & + E_x\left[u(x_\sigma)\ ;\ x_\sigma \in \Omega(\sqrt{R})^c \right] \\ & + E_x\left[M(\sqrt{R})\ ;\ x_\sigma \in \Omega(4R) \setminus \Omega(3R) \right] \\ & - E_x\left[M(\sqrt{R}) - u(x_\sigma)\ ;\ x_\sigma \in \Omega(4R) \setminus \Omega(3R) \right] \end{aligned}$$

と書き直せば, $R \leq 2^{-6}$, $3R < 4R < \sqrt{R}$ より,

$$u_R(x) \leq M(\sqrt{R}) + C\sqrt{R}\,\|u\| - \frac{M(\sqrt{R}) - m(\sqrt{R})}{2} P_x(x_\sigma \in A^-)$$

同様にして

$$u_R(x) \geq m(\sqrt{R}) - C\sqrt{R}\,\|u\| + \frac{M(\sqrt{R}) - m(\sqrt{R})}{2} P_x(x_\sigma \in A^+)$$

を得る. $|A^-| \geq \frac{1}{2} |\Omega(4R) \setminus \Omega(3R)|$ 又は

$|A^+| \geq \frac{1}{2} |\Omega(4R) \setminus \Omega(3R)|$ ($|A|$ は A の Lebesgue measure)

より, 今 $|A^-| \geq \frac{1}{2} |\Omega(4R) \setminus \Omega(3R)|$ と仮定すると

$$P_x(x_\sigma \in A^-) = E_x\left(\int_0^\sigma dt \int_{x_t + z \in A^-} P_\varepsilon(x_t, dz) \right)$$

$x_t + z \in A^-$ ならば $3R < |x_t + z - a| \leq 4R$ より

$R < |z| \leq 6R$

従って

$$\int_{x_t+z\in A^-} P_\varepsilon(x_t, dz) \geq \int_{x_t+z\in A^-} (\varepsilon|z|^{-(1+\delta)} + L_1|z|^{-(1+\eta)})\,\omega_N |z|^{-(N-1)} dz$$

$$\geq \text{Const.}\, \frac{\varepsilon R^{-\delta} + L_1 R^{-\eta}}{R^N} \int_{x_t+z\in A^-} dz$$

$$= \text{Const.}\, \frac{\varepsilon R^{-\delta} + L_1 R^{-\eta}}{R^N} |A^-|$$

$$\geq \frac{\text{Const}}{2}\, \frac{\varepsilon R^{-\delta} + L_1 R^{-\eta}}{R^N} |\Omega(4R) \setminus \Omega(3R)|$$

$$\geq \frac{5}{2}\,\text{const.}\, \frac{\varepsilon R^{-\delta} + L_1 R^{-\eta}}{R^N} |\Omega(0,1)|$$

故に Lemma 1 より 定数 $C_6 = C_6(\delta) > 0$ が存在して

$$P_x^\varepsilon(x_\sigma \in A^-) \geq C_6 \qquad \forall x \in \Omega(a, R) \quad 0<\varepsilon\leq 1$$

よって. (1°) と合せて (i) を得る.

もし $|A^+| \geq \frac{1}{2}|\Omega(4R)\setminus\Omega(3R)|$ ならば (ii) を得る.

<u>Lemma 3</u>

1°) $0 < p < 1$ なる定数 p が存在して (ε と x に independent)

$$E_x^\varepsilon(e^{-\lambda\sigma_N}) \leq p^N \quad , \text{但し } \sigma_N = \inf\{t>0\,;\, |x_t - x_0| \geq N\}$$

2°) $f \in B(R^N)$, compact support で $u = H_\lambda^\varepsilon f$ ならば

$\rho(x, \mathrm{supp}(f)) \geq N$ のとき $\left(\rho(x,K) = \inf_{y\in K}|x-y|\right)$

$$|u(x)| \leq p^N \|u\| \leq \frac{1}{\lambda} p^N \|f\|$$

proof）

Lemma 1 より 定数 $0 < C_1' < C_2'$ が存在して、

$$C_1' R^\delta \leq E_x^\varepsilon(\sigma_R) \leq C_2' R \quad (0 < R \leq 1,\ 0 < \varepsilon \leq 1,\ x \in R^N)$$

従って、

$$1 - E_x^\varepsilon(e^{-\lambda\sigma_R}) \geq \lambda E_x^\varepsilon(\sigma_R) - \frac{1}{2}\lambda^2 E_x^\varepsilon(\sigma_R^2)$$

$$\geq \lambda C_1' R^\delta - \lambda^2 (C_2' R)(C_2' \cdot 2R) \quad \text{(注)}$$

$$= C(\lambda, R) > 0 \quad \text{for sufficiently small } R > 0.$$

故に、 $\sup\limits_{\substack{0<\varepsilon\leq 1 \\ x \in R^N}} E_x^\varepsilon(e^{-\lambda\sigma_1}) = p < 1$

後は、 $\sigma_N = \inf\{t \geq 0 ;\ |x_t - x| \geq N\}$ a.s. P_x $\forall x$

と強マルコフ性を使えば 1°）の主張を得る。

(注) $\sigma_R = \inf\{t \geq 0 ;\ |x_t - x| \geq R\}$ a.s. P_x $\forall x$ より

$$E_x^\varepsilon(\sigma_R^2) = E_x^\varepsilon\left(2\int_0^{\sigma_R}(\sigma_R - s)\,ds\right) \leq 2 \cdot E_x^\varepsilon\left(\int_0^{\sigma_R} ds\, E_{x_s}^\varepsilon(\sigma_{2R})\right)$$

$$\leq 2\,(C_2' R)(C_2' \cdot 2R)$$

(2°) は
$$u(x) = E_x^\varepsilon\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(x_t)\,dt\right)$$

$$= E_x^\varepsilon\left(\int_0^{\sigma_N} e^{-\lambda t} f(x_t)\,dt\right) + E_x^\varepsilon\left(e^{-\lambda\sigma_N} E_{x_{\sigma_N}}^\varepsilon\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(x_t)\,dt\right)\right)$$

$$= E_x^\varepsilon\left(e^{-\lambda\sigma_N} u(x_{\sigma_N})\right) \leq p^N \|u\|$$

Theorem 3 （Motoo [5]）

仮定 (A), (B), (C) の下で、$a_i(x)$, $\varphi(x, z)$ が共に連続ならば H.1 〜 H.4 をみたす resolvent $\{H_\lambda\}_{\lambda>0}$ が存在

する．従って $\{H_\lambda\}_{\lambda>0}$ に対応する Hunt process が存在する．

proof)

$$\omega^\varepsilon(a,R) = \omega(u^\varepsilon, a, R) \equiv M^\varepsilon(a,R) - m^\varepsilon(a,R)$$ とおく

もし，Lemma 2 の 2°) で i) が成立すれば

$$m^\varepsilon(a,R) \geq m^\varepsilon(a,\sqrt{R}) \quad (R \leq 1)$$ に注意して

$$\omega^\varepsilon(a,R) \leq (1-C_4)\,\omega^\varepsilon(a,\sqrt{R}) + C_5\sqrt{R}$$

故に

$$\omega(u^\varepsilon,R) \equiv \omega^\varepsilon(R) \equiv \sup_{a\in R^N} \omega^\varepsilon(a,R)$$ とおくと

$$\omega^\varepsilon(R) \leq (1-C_4)\,\omega^\varepsilon(\sqrt{R}) + C_5\sqrt{R}$$

従って

$$\omega^\varepsilon(R) \leq \frac{C_5}{C_4}\sqrt{R}$$

となり

$\{u^\varepsilon = H^\varepsilon_\lambda f\}_{\varepsilon>0}$ は 各 $f \in C_0(S)$, $\lambda>0$ に対し

同程度連続になる．よって，Lemma 3 の (2°) とあわせて

$\{H^\varepsilon_\lambda f\}_{\varepsilon>0}$ は 各 $f \in C_K(R^N)$ (compact support の連続函数)

と $\lambda>0$ に対し，$C_0(R^N)$ で相対コンパクトである．

$C_0(R^N)$ の separability と 各 H^ε_λ の resolvent equation

に注意すれば，ある $\{\varepsilon_n\}$ $\varepsilon_n \downarrow 0$ が存在して

$\{H^{\varepsilon_n}_\lambda f\}_n$ は ${}^\forall f \in C_0(R^N)$ と ${}^\forall\lambda>0$ について $n\to\infty$

のとき、$C_0(R^N)$ の中で収束する。

$$H_\lambda f = \lim_{n\to\infty} H_\lambda^{\varepsilon_n} f$$

とおくと $\{H_\lambda\}_{\lambda>0}$ は H.1, H.2 をみたすことは明らか。

又、H.4 をみたすことは、

$$H_\lambda^{\varepsilon_n}(\lambda - A)f \xrightarrow[n\to\infty]{} H_\lambda(\lambda - A)f \qquad \forall f \in C_K^2(R^N)$$

$$\begin{aligned} f &= H_\lambda^{\varepsilon_n}(\lambda - A^{\varepsilon_n})f \\ &= H_\lambda^{\varepsilon_n}(\lambda - A)f + H_\lambda^{\varepsilon_n}(A - A^{\varepsilon_n})f \end{aligned}$$

ここで

$$\| H_\lambda^{\varepsilon_n}(A - A^{\varepsilon_n})f \| \leq \frac{1}{\lambda} \| (A - A^{\varepsilon_n})f \| \to 0 \quad (n\to\infty)$$

従って、H.4 が分る。最後に H.3 は、H.4 より

$$H_\lambda(\lambda - A)f = f \qquad f \in C_K^2(R^N)$$

従って、 $\lambda H_\lambda f - H_\lambda A f = f$

$$H_\lambda A f \to 0 \quad (\lambda\to\infty)$$

より $\lambda H_\lambda f \to f \quad \forall f \in C_K^2(R^N)$

故に $\lambda H_\lambda f \to f \quad \forall f \in C_0(R^N)$

終りに、本尾実，田中洋，渡辺信三の三先生には，未発表の結果をも自由にみせて頂き，この報告をまとめることができました．ここに記して，感謝致します．

文　献

[1] R.M. Blumenthal - R.K. Getoor ; J. Math. Mech. 10 (1961) 493-516

[2] N. Ikeda ; Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto. Ser. A, 33 (1961) 367-427.

[3]. S.A. Molčanov - E. Ostrovsky ; Theory Prob. Appl. 9 (1970). 127-130.

[4]. M. Motoo ; Proc. 5-th Berkeley Symp. vol. II. part 2 Univ. Calif. Press (1967) 75-110

[5] M. Motoo ; Generalized stable process の存在 P.S.G サマーセミナー 講演 (1970, 7)

[6] K. Sato ; Semigroups and Markov process Lecture note (1968) Univ. Minnesota

[7] K. Sato - T. Ueno ; Jour. Math. Kyoto. Univ. 4 (1965) 529-606

[8]. H. Tanaka ; 加法過程に対する不連続係数 drift の perturbation 未発表

[9] H. Tanaka - M. Tsuchiya ; Lévy process の drift による perturbation . 日本数学会講演 (1970. 4)

[10]. M. Tsuchiya ; Jour. Math. Kyoto. Univ. 10 (1970) 475-492

[11]. A. D. Ventzel ; Theory. Prob. Appl. 3 (1959) 164-177

[12]. S. Watanabe ; ある種の確率積分方程式の解の存在と一意性について. 日本数学会講演 (1970, 4).

[13]. D.W. Stroock - S.R.S. Varadhan ; Comm Pure Appl Math . XXII (1969) 345-400 & 479-530.